Διαφ. Εξισώσεις

24/11/16

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε

(Ε) $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$, $a_i, b \in C(I)$

*Παρατήρηση

Αν y_p είναι μια (μερική) λύση της (Ε) τότε κάθε λύση της y της (Ε) γράφεται ως $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) + y_p(x)$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μεταβολή των σταθερών)

Αν είναι $\{y_1, \dots, y_n\}$ Β.Σ.Λ της (E_0) και $v_1, \dots, v_n$ συναρτήσεις (στο I) που ικανοποιούν το σύστημα

$$(S)\quad \begin{cases} y_1 v_1' + y_2 v_2' + \dots + y_n v_n' = 0 \\ y_1' v_1' + y_2' v_2' + \dots + y_n' v_n' = 0 \\ \dots \\ y_1^{(n-2)} v_1' + \dots + y_n^{(n-2)} v_n' = 0 \\ y_1^{(n-1)} v_1' + \dots + y_n^{(n-1)} v_n' = b/a_n \end{cases}$$

τότε μια μερική λύση της (Ε) είναι η

$$y_p(x) = y_1(x) v_1(x) + \dots + y_n(x) v_n , \quad x \in I$$

Απόδειξη

Παρατηρώ ότι το (S) έχει ακριβώς μια λύση.

Η ορίζουσα D του (S) είναι η $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$, $\forall x \in I$

Θα αποδείξω ότι η y_p είναι λύση της (Ε). Είναι:

$$y_p = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$$

$$y_p' = y_1' v_1 + \dots + y_n' v_n + \underbrace{y_1 v_1' + \dots + y_n v_n'}_{=0}$$

$$y_p'' = y_1'' v_1 + \dots + y_n'' v_n + \underbrace{y_1' v_1' + \dots + y_n' v_n'}_{=0}$$

$$y_p^{(n-2)} = y_1^{(n-2)} v_1 + \dots + y_n^{(n-2)} v_n + \underbrace{y_1^{(n-3)} v_1' + \dots + y_n^{(n-3)} v_n'}_{=0}$$

$$y_p^{(n-1)} = y_1^{(n-1)} v_1 + \dots + y_n^{(n-1)} v_n + \cancel{y_1^{(n-2)} v_1' + \dots + y_n^{(n-2)} v_n'}^{\to 0} \quad \Big| \; a_{n-1}$$

$$y_p^{(n)} = y_1^{(n)} v_1 + \dots + y_n^{(n)} v_n + \underbrace{y_1^{(n-1)} v_1' + \dots + y_n^{(n-1)} v_n'}_{b/a_n} \quad \Big| \; a_n$$

$$a(y_p) = v_1 (a_0 y_1 + a_1 y_1' + \dots + a_n y_1^{(n)})$$
$$+ v_2 (a_0 y_2 + a_1 y_2' + \dots + a_n y_2^{(n)})$$
$$\vdots$$
$$+ v_n (a_0 y_n + \dots + a_n y_n^{(n)}) + a_n \frac{b}{a_n}$$

$$v_1 \cancel{L(y_1)}^{\to 0} + v_2 \cancel{L(y_2)}^{\to 0} + \dots + v_n \cancel{L(y_n)}^{\to 0} + b$$

$$\Longrightarrow \quad L(y_p) = b$$

y_p λύση της (E)

(*) από το (S) έχουμε $v_1'(x) = \dfrac{\tilde{W}_1(x)}{W(x)}, \dots, v_n' = \dfrac{\tilde{W}_n(x)}{W(x)}$,

όπου $\tilde{W}_i(x)$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει απ' την W με αντικατάσταση της i-στήλης με $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b/a_n \end{bmatrix}$

$$\tilde{W}_i(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ & & & \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)} & b/a_n & y_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \frac{b}{a_n} \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & 0 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & 1 & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}_{W_i(s)}$$

Επομένως, $\boxed{v_i(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\tilde{W}_i(s)}{W(s)} ds = \int_{x_0}^{s} \frac{W_i(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_n(s)} ds}$

(†) $y_p(x) = \sum y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_n(s)} ds, \; x \in I$

Η y_p ικανοποιεί τις: $y_p(x_0) = 0, \dots, y_p^{(n-1)}(x_0) = 0$

$$\begin{vmatrix} y_0(x_0) = c_1 \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)}(x_0) = c_n \end{vmatrix}$$

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$

$\{y_1, y_2\}$ $\quad W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = -y_2$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 1 \end{vmatrix} = y_1$$

Παράδειγμα Βιβλίου

$x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 2x^4\log x \quad , x>0$

η ομογενής εξίσωση έχει λύσεις της μορφής x^4

$\longrightarrow y_1(x) = x \; , \; y_2(x) = x^2 \; , \; y_3(x) = x^4 \quad , x>0$

είναι ΒΣΛ?

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2 & 12x^2 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2 & 12x^2 \end{vmatrix} = 6x^2 \neq 0 \quad , x>0$$

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{3} y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_3(s)} \, ds \qquad (x_0 = 1)$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^4 \\ 0 & 2x & 4x^3 \\ 1 & 2 & 12x^2 \end{vmatrix} = 2x^5$$

$W_2(x) = 3x^4$

$W_3(x) = x^2$

$$y_p(x) = x \int_1^x \frac{2s^5}{6s^4} \frac{2s^4 \log s}{s^3} \, ds + x^2 \int_1^x \frac{-3s^4}{6s^4} \frac{2s^4 \log s}{s^3} \, ds$$

$$+ x^4 \int_1^x \frac{s^2}{6s^4} \frac{2s^4 \log s}{s^3} \, ds$$

...

$\rightarrow V_1' = \frac{2}{3} s^2 \log s \rightarrow V_1(x) = \int_1^x \frac{2}{3} s^2 \log s \, ds$

Άσκηση

$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^2 e^{2x} \quad , x>0$

Η αντίστοιχη ομογενής έχει μια λύση της μορφής: e^{mx}

Θα πρέπει $\quad x m^2 e^{mx} - 2(x+1) m e^{mx} + (x+2) e^{mx} = 0$

$e^{mx}\left[x m^2 - 2(x+1) m + (x+2) \right] = 0$

$x m^2 - 2xm - 2m + x + 2 = 0 \quad , x>0$

$x(m^2 - 2m + 1) + 2 - 2m = 0 \quad , x>0$

$x(m-1)^2 + 2(1-m) = 0$

$m - 1 = 0$

$m = 1$

Άρα $y_1(x) = e^x$ λύση της ομογενούς

Για μια άλλη λύση της (E_0), θέτω $y = e^x z$

έχουμε: $x\left(e^x z + 2e^x z' + e^x z''\right) - 2(x+1)\left(e^x z + e^x z'\right) + (x+2)e^x z = 0$

$$xz + 2xz' + xz'' - 2(x+1)z - 2(x+1)z' + (x+2)z = 0$$

$$xz'' + z'(2x - 2x - 2) + z\,(x - 2x - 2 + x + 2) = 0$$

$$xz'' - 2z' = 0$$

Θέτω $z' = u \rightsquigarrow xu' - 2u = 0 \quad \| \quad u = e^{2x}$

$$z = \frac{e^{2x}}{2}$$

Άρα $y_2(x) = \dfrac{e^x e^{2x}}{2} = \dfrac{e^{3x}}{2}$

και μετά δουλεύω το θεώρημα με τις λύσεις y_1, y_2.

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘ. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ $a_i \in \mathbb{R}$

- $y'' - 2y' + y = 0$

$e^{\lambda x}$: $\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) = 0$$

$$\lambda = 1$$

Άρα e^x λύση $\lambda = 1$ διπλή ρίζα

- $y'' - 3y' + 2y = 0$

$e^{\lambda x} \mid \ \dots \ e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) = 0$

$$\left.\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{matrix}\right| \rightarrow \begin{matrix} e^x \\ e^{2x} \end{matrix}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

(E_0): $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, a_i: σταθερές, $x \in \mathbb{R}$

Ας είναι λ_i $(i = 1, \dots, r)$ διακεκριμένες ρίζες του χαρ. πολυωνύμου

$(\chi.\pi)$: $p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$, πολλαπλότητας m_i αντίστοιχα $(m_1 + \dots + m_r) = n)$

Τότε οι συναρτήσεις $x^j e^{\lambda_i x}$, $j = 0, \dots, m_i - 1$, $i = 1, \dots, r$ αποτελούν ένα β.σ.λ. της (E_0)

Παράδειγμα

$\lambda_1 = 2 \quad m_1 = 4$

$\lambda_2 = 7 \quad m_2 = 3$

$\lambda_3 = -1 \quad m_3 = 1$

$$\left\{ \begin{matrix} e^{2x}, & xe^{2x}, & x^2e^{2x}, & x^3e^{2x} \\ e^{7x}, & xe^{7x}, & x^2e^{7x} & \\ e^{-x} & & & \end{matrix} \right\} \quad \text{B.Σ.Λ}$$

Παράδειγμα

- $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 3$

Άρα Β.Σ.Λ $\{e^{-x}, e^{2x}, e^{3x}\}$

$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$

- $y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$y_1(x) = e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$y_2(x) = e^{-ix} = \cos x - i\sin x \quad \oplus$

$= 2\cos x$

Αν αφαιρέσω κατά μέλη $= 2i\sin x$

Άρα λύσεις της εξίσωσης $\cos x, \sin x$